

## ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ ПРОТРАНСТВЕННЫЕ КООРДИНАТЫ

**Пространственные прямоугольные координаты.** Рассмотрим пространственные прямоугольные координаты, имеющие большое значение в связи с широким использованием спутниковых данных. Начало координат - в центре земного эллипсоида, ось  $X$  — в плоскости начального меридiana долготы  $L_0$ , ось  $Z$  направлена по оси вращения эллипсоида, при этом оси  $X$  и  $Y$  лежат в плоскости экватора (рис. 6.1). Если центр эллипса совмещен с центром масс Земли, а начальным меридианом является меридиан Гринвича ( $L_0 = 0$ ), то имеет место гринвичская геоцентрическая система координат. Если же центр эллипса смещен с центра масс Земли, то получим квазигеоцентрическую систему координат.

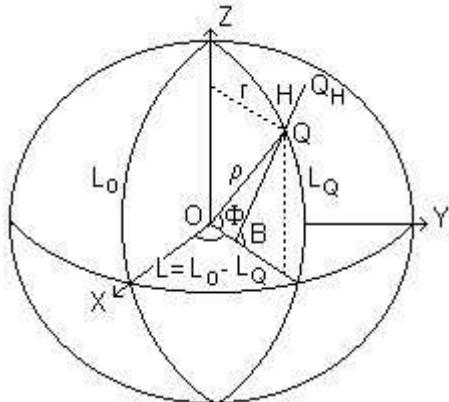


Рис. 6.1. Пространственные  
прямоугольные координаты

Спутниковых данных. Начало координат - в центре земного эллипса, ось  $X$  — в плоскости начального меридiana долготы  $L_0$ , ось  $Z$  направлена по оси вращения эллипса, при этом оси  $X$  и  $Y$  лежат в плоскости экватора (рис. 6.1). Если центр эллипса совмещен с центром масс Земли, а начальным меридианом является меридиан Гринвича ( $L_0 = 0$ ), то имеет место гринвичская геоцентрическая система координат. Если же центр эллипса смещен с центра масс Земли, то получим квазигеоцентрическую систему координат.

**Геоцентрические прямоугольные координаты.** Из рис. 6.1 следует:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos L \\ r \sin L \\ r \tan \Phi \end{pmatrix}.$$

Эти уравнения используем в качестве исходных для получения последующих формул. Выразив радиус параллели  $r$  через радиус-вектор  $\rho$  и геоцентрическую широту  $\Phi$

$$r = \rho \cos \Phi,$$

для координат  $X, Y, Z$  получим:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \Phi \cos L \\ \rho \cos \Phi \sin L \\ \rho \sin \Phi \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Пусть некоторая точка  $Q$  расположена на поверхности эллипса. Определим ее прямоугольные пространственные координаты в функции геодезической широты  $B$  и геодезической долготы  $L$ . Учитывая формулы для радиуса параллели и для взаимосвязи геоцентрической и геодезической широт для точек на эллипсе

$$r = N \cos B, \quad \tan \Phi = (1 - e^2) \tan B,$$

получим:

$$\begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \cos B \cos L \\ N \cos B \sin L \\ N(1 - e^2) \sin B \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Эти формулы верны только для точек на эллипсе. Рассмотрим случай, когда некоторая точка  $Q_H$  приподнята над земным эллипсом на геодезическую высоту  $H$ .

Геодезическая высота  $H$  отсчитывается по нормали от точки  $Q$  на эллипсе. Нормаль образует с плоскостью экватора угол, равный геодезической широте  $B$ . Поэтому для приращений координат точки  $Q_H$  над точкой  $Q$  (рис. 6.1) имеем:

$$\begin{pmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \\ Z - Z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \cos B \cos L \\ H \cos B \sin L \\ H \sin B \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Суммируя координаты (6.2) и (6.3), получаем формулы прямоугольных координат для точек, расположенных на любых высотах  $H$  над эллипсоидом:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + H) \cos B \cos L \\ (N + H) \cos B \sin L \\ (N(1 - e^2) + H) \sin B \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

**Производные от  $X, Y, Z$  по  $B, L$  и  $H$ .** Их используют в разных целях, в частности, для оценки точности определений прямоугольных координат.

$$\begin{aligned} \partial X / \partial B &= -(M + H) \sin B \cos L; & \partial X / \partial L &= -(N + H) \cos B \sin L; & \partial X / \partial H &= \cos B \cos L; \\ \partial Y / \partial B &= -(M + H) \sin B \sin L; & \partial Y / \partial L &= (N + H) \cos B \cos L; & \partial Y / \partial H &= \cos B \sin L; \\ \partial Z / \partial B &= (M + H) \cos B; & \partial Z / \partial L &= 0; & \partial Z / \partial H &= \sin B. \end{aligned}$$

Для взаимосвязи дисперсий ошибок  $\sigma$  в  $X, Y, Z$  и  $B, L, H$  имеем ( $\rho'' = 206265''$ ):

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 \\ \sigma_y^2 \\ \sigma_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((M + H) \sin B \cos L)^2 & ((N + H) \cos B \sin L)^2 & (\cos B \cos L)^2 \\ ((M + H) \sin B \sin L)^2 & ((N + H) \cos B \cos L)^2 & (\cos B \sin L)^2 \\ ((M + H) \cos B)^2 & 0 & (\sin B)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma_B / \rho'')^2 \\ (\sigma_L / \rho'')^2 \\ \sigma_H^2 \end{pmatrix}.$$

Приняв  $H = 10$  км,  $B = L = 45^\circ$ ,  $\sigma_B = \sigma_L = 0,0001''$ ,  $\sigma_H = 0,003$  м, получим  $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma_Z \approx 0,003$  м

**Вычисление геоцентрической широты и радиус-вектора.** Из формул (6.1) следует:

$$\sin \Phi = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad (6.5 \text{ а})$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (6.5 \text{ б})$$

Если точка расположена над полюсом ( $X = Y = 0$ ), то  $\Phi$  приписывается широта полюса.

Для радиус-вектора имеем:

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (6.6)$$

**Вычисление геодезической долготы по прямоугольным координатам.** Из формул (6.1) или (6.4) следует:

$$\sin L = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad (6.7 \text{ а})$$

$$\operatorname{tg} L = \frac{Y}{X}. \quad (6.7 \text{ б})$$

Если точка лежит в плоскости меридиана, перпендикулярной плоскости начального меридиана ( $X = 0$ ), то долгота  $L$  принимается равной  $0^\circ$  при  $Y = 0$ ,  $90^\circ$ , когда  $Y > 0$ , и  $270^\circ$  при  $Y < 0$ . Если  $Y = 0$ , то  $L = 0$  при  $X \geq 0$ , и  $L = \pi$  при  $X < 0$ .

В публикации [10] даётся следующий алгоритм:

$$\begin{aligned} L &= 2 \operatorname{arctg} \frac{Y}{X + R} + \pi(1 - \operatorname{sign} Y), \text{ если } Y \neq 0; \\ L &= \begin{cases} 0 & \text{при } X \geq 0 \text{ и } Y = 0 \\ \pi & \text{при } X < 0 \text{ и } Y = 0 \end{cases}; \\ R &= \sqrt{X^2 + Y^2}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

**Вычисление геодезической широты и высоты.** Выводом формул для вычислений геодезических широт и высот занимались многие учёные. Их работы опубликованы. Предложенные способы можно разделить на две группы:

- *итеративные*, выполняемые последовательными приближениями,
- *неитеративные*, вычисляемые по конечным формулам.

В данной лекции представлены основные, разработанные разными авторами, способы решений упомянуты в заголовке задач. Практически они все обеспечивают высокую точность определений геодезических координат.

**1. Итеративный алгоритм вычисления геодезической широты и высоты по отрезку ( $N+H$ ) нормали к эллипсоиду.** Имея в виду формулы (6.4), введём обозначения:

$$\begin{aligned} S &= \sin B \cdot N = a / \sqrt{1 - e^2 S^2}, \quad P = e^2 N S, \\ Q &= \sqrt{X^2 + Y^2 + (Z + P)^2} = (N + H). \end{aligned}$$

Построим следующую последовательность вычислений:

$$\begin{aligned} S_1, N_1, P_1, Q_1, \\ S_2 &= (Z + P_1) / Q_1, \\ \Delta &= |S_2 - S_1| \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока абсолютная разность результатов двух последовательных приближений  $S_2$  и  $S_1$  не станет удовлетворять условию  $\Delta \leq \varepsilon$ . Допуск  $\varepsilon$  определяется погрешностью вычисления геодезической широты. Например,  $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-9}$  (допускается ошибка в 0,5 единиц в девятом после запятой знаке синуса) соответствует погрешности  $0,0001''$  в широте или около 3 мм в линейной мере. В начальном приближении принимается  $S_1 = 0$ . При этом после первого приближения будет вычислена геоцентрическая широта  $\Phi$  (6.5а). Поэтому данное действие следует рассматривать не как приближение, а как подготовку к итерациям. Удобно, что такая подготовка органически включена в общую схему приближений. Фактически первое приближение лишь начинается после определения геоцентрической широты. Далее, приняв  $S_1 = S_2$ , приступают к следующему приближению. По завершении итераций вычисляются геодезическая широта и высота:

$$\begin{aligned} B &= \operatorname{arctg} \left( S_2 / \sqrt{1 - S_2^2} \right), \quad \text{если } (X^2 + Y^2) \neq 0, \\ B &= \frac{\pi}{2} \frac{Z}{|Z|} \quad \text{при } (X^2 + Y^2) = 0, \\ H &= Q_2 - N_2. \end{aligned}$$

Способ отличается простотой теоретических построений, понятностью алгоритма и высокой точностью получаемых результатов. Он приведён в работе [15] и использован в практикуме [14]. Число приближений зависит от требуемой точности вычислений широты  $B$ , и это число несколько увеличивается с приближением определяемых точек к экватору (табл. 6.1). В ходе вычислений не возникает необходимости в каждой итерации находить  $\arcsin B$  или  $\operatorname{arctg} B$ . Благодаря этому несколько ускоряется весь процесс приближений.

Таблица 6.1

Число приближений в способе  
вычисления широт и высот по отрезку ( $N+H$ )

Точность вычислений $\sin B$	Число приближений при разных широтах			
	$90^\circ$	$89^\circ$	$45^\circ$	$5^\circ$
$10^{-6}$	1	2	3	3
$10^{-9}$	1	2	4	4
$10^{-12}$	1	3	5	6

## 2. Итеративный алгоритм вычисления геодезической широты и высоты на основе геометрических представлений.

Суть способа можно выяснить на основе геометрических представлений по рис. 6.2. На рис. 6.2а более наглядно представлено изображение в плоскости меридiana долготы  $L$ .

Заметим, что нормаль к эллипсоиду, проходящая через точки  $Q$  и  $K$  и радиус-вектор  $\rho = OK$ , лежат в одной и той же плоскости. Поэтому треугольник  $nOK$  является плоским треугольником. Тогда из теоремы синусов следует:

$$\frac{\sin(B - \Phi)}{nO} = \frac{\sin(90^\circ - B)}{\rho}.$$

Отрезок  $nO$  определяет расстояние между центром  $O$  эллипсоида вращения и точкой  $n$  пересечения нормали с полярной осью эллипсоида. Этот отрезок равен [9, с.44]

$$nO = e^2 N \sin B.$$

Имеем:

$$\sin(B - \Phi) = \frac{e^2 N \sin B}{\rho} \cos B$$

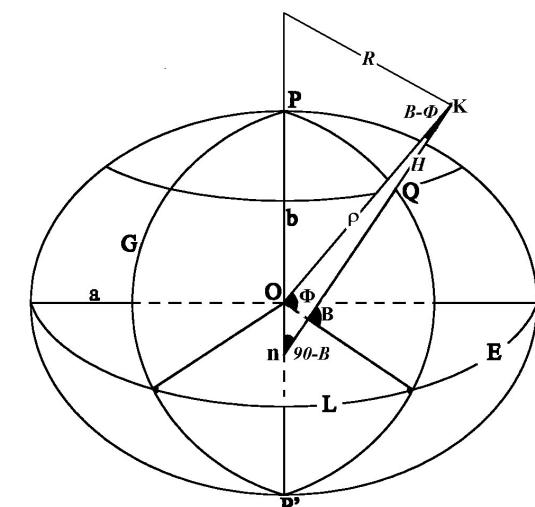


Рис. 6.2. К построению итеративного алгоритма вычислений геодезической широты и высоты

Радиус-вектор  $\rho$  определяется формулой (6.6). Выделим постоянные для точки  $K$  величины:

$$p = \frac{e^2 a}{2\rho}; R = \sqrt{X^2 + Y^2}; \Phi = \arcsin \frac{Z}{\rho} = \operatorname{arctg} \frac{Z}{R}.$$

Величина  $\Phi$  – геоцентрическая широта (6.5а). Учитывая формулу для  $N$  радиуса кривизны первого вертикала, получаем:

$$B = \Phi + S, \quad S = \arcsin \frac{p \sin 2B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}.$$

Эти выражения служат основой для построения итеративного алгоритма. Вначале принимается  $S_1 = 0$ . Вычисляются  $B$  и  $S_2$ . Затем выполняется проверка

$$\Delta = |S_2 - S_1| \leq \epsilon.$$

Если это условие не выполняется, то принимается

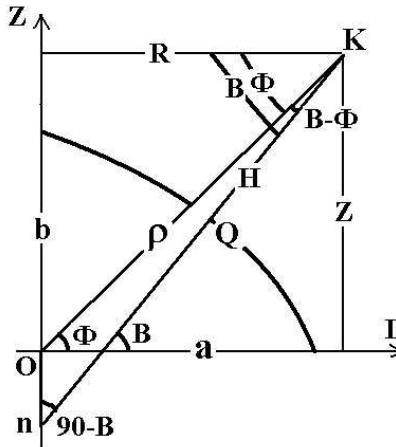


Рис. 6.2а. Треугольник KnO

$$S_1 = S_2.$$

Вычисления повторяются. Итерации продолжаются до выполнения указанного неравенства. После этого находят  $H$ :

$$H = R \cos B + Z \sin B - a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \quad (6.10)$$

Формулу (6.10) легко вывести:

$$\begin{aligned} R \cos B + Z \sin B &= (N + H) \cos^2 B + (N + H) \sin^2 B - e^2 N \sin^2 B = \\ &= N + H - e^2 N \sin^2 B = H + N(1 - e^2 \sin^2 B) = H + a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \end{aligned}$$

Отсюда следует формула (6.10). Погрешность  $\Delta H$  в высоте  $H$  в зависимости от ошибок  $\Delta B$  в широте определяется уравнением [10]:

$$\Delta H = -\frac{1}{2}(a + H)\Delta B^2.$$

Если предположить, что половина суммы радиуса Земли с высотой составляет около 10 000 км или  $10^{10}$  мм, ошибка в широте  $2''$ , в радианах это около  $10^{-5}$ , а в квадрате  $10^{-10}$ , то погрешность в высоте составит 1 мм.

Такой алгоритм рекомендован в [5].

**3. Итеративный алгоритм вычисления геодезической широты и высоты по отстоянию  $R$  точки измерений от оси вращения эллипсоида.** Этому способу учёными уделено больше всего внимания. Отстояние  $R$  определяется формулой (6.8). Итерациями вычисляется широта на основе решения трансцендентного уравнения, следующего из формул (6.4):

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z + e^2 N \sin B}{R}. \quad (6.11)$$

Если точка расположена над полюсом ( $R = 0$ ), то величине  $B$  приписывается широта полюса. В начальном приближении рекомендуется принять [12, 10]:

$$\operatorname{tg} B_0 = \frac{Z}{(1 - e^2)R}. \quad (6.12)$$

Погрешность  $\Delta B_k$  вычисления широты в  $k$ -м приближении будет [10]:

$$\Delta B_k'' = \rho'' \frac{a^k e^{2k+2} H}{(a + H)^{k+1}} \sin B_0 (\cos B_0)^{2k+1},$$

где  $a, e$  – параметры эллипсоида,  $\rho'' = 206 265''$  – число угловых секунд в радиане. Максимальные значения погрешностей при геодезической высоте  $H = 10$  км составили:  $\Delta B_0 = 1,1''$ ;  $\Delta B_1 = 0,0047''$ ;  $\Delta B_2 = 0,000025''$ . Следовательно, для вычисления широты с погрешностью

$0,0001''$  достаточно двух приближений [10]. Практически число итераций колеблется от 3 до 5.

Для определения высоты, по мнению П.А. Медведева, лучшей является формула (6.10) [10].

При вычислениях по формуле (6.11) в каждой итерации приходится определять  $\operatorname{arctg}B$  и  $\sin B$ . Поэтому в учебнике [11, с. 192] вместо (6.11) рекомендована видоизменённая формула:

$$t_{i+1} = t_0 + \frac{pt_i}{\sqrt{k + t_i^2}},$$

$$t_0 = \frac{Z}{R}; \quad p = \frac{ce^2}{R}; \quad k = 1 + e^2; \quad c = \frac{a^2}{b}; \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Широта  $B$  и высота  $H$  определяются по последнему приближению  $t$ :

$$B = \operatorname{arctg} t,$$

$$H = \left( R - \frac{c}{\sqrt{k + t^2}} \right) \sqrt{1 + t^2}.$$

Число приближений, без учёта широты наблюдений, указано в табл. 6.2 [11, с. 193].

Таблица 6.2

Число приближений в способе  
вычисления широт и высот по отрезку  $R$

Точность вычислений $\sin B$	Число приближений
$10^{-6}$	2
$10^{-9}$	3
$10^{-12}$	4

**4. Итеративные вычисления геодезической широты и высоты по алгоритму Borkowski K.M.** Способ основан на использовании приведенной широты  $U$  [17]. Для радиуса параллели и аппликаты  $Z$  имеем (см. (3.1) Лекции 3):

$$r = a \cos U; Z = b \sin U.$$

Из формул (6.4) следуют:

$$R = (N + H) \cos B = a \cos U + H \cos B,$$

$$Z = (N(1 - e^2) + H) \sin B = b \sin U + H \sin B. \quad (6.13)$$

Из уравнений исключают высоту  $H$ :

$$\frac{Z - b \sin U}{R - a \cos U} = \operatorname{tg} B = \frac{a \sin U}{b \cos U}.$$

$$aR \sin U - bZ \cos U - (a^2 - b^2) \sin U \cos U = 0.$$

Обозначают:

$$\sin \Omega = \frac{bZ}{\sqrt{(aR)^2 + (bZ)^2}}, \quad \cos \Omega = \frac{aR}{\sqrt{(aR)^2 + (bZ)^2}}, \quad \operatorname{tg} \Omega = \frac{bZ}{aR},$$

$$C = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(aR)^2 + (bZ)^2}}.$$

Получают:

$$2\sin(U - \Omega) - C \sin 2U = 0. \quad (6.14)$$

Это уравнение решают методом Ньютона:

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= U_k - [2\sin(U_k - \Omega) - C \sin 2U_k]/W, \\ W &= 2[\cos(U_k - \Omega) - C \cos 2U_k]. \end{aligned}$$

В качестве начального приближения, что следует из (6.13) при  $H = 0$ , предлагается

$$U_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{aZ}{bR}\right).$$

Для обеспечения высокой точности результатов достаточно лишь двух итераций [17]. Геодезическая широта и высота вычисляются по формулам:

$$\tan B = \frac{a}{b} \tan U,$$

$$H = (R - a \cos U) \cos B + (Z - b \sin U) \sin B.$$

Формула для высоты следует из (6.13).

Этим же автором получена формула, не требующая итераций. Результат найден путём определения корней полинома четвертой степени [17].

**5. Итеративный алгоритм вычисления геодезической широты и высоты способом Полещенкова В.Н.** Алгоритм изложен в статье [13]. Введён масштабный множитель  $k$ , равный отношению отрезков  $AD/AC$  (рис. 6.3). Оба этих отрезка лежат на нормали к эллипсоиду. Координаты точки  $C(x_C, z_C)$ , лежащей на эллипсоиде, выражают через координаты точки  $D(R, Z)$ . Получают:

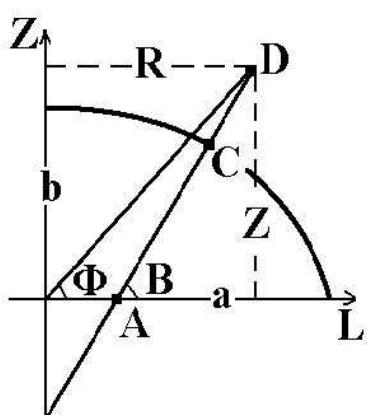


Рис. 6.3. Меридиональное сечение эллипсоида

$$x_C = \frac{R}{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^2 k + e^2\right)}; \quad z_C = \frac{Z}{k}; \quad k \geq 1.$$

Вводится ряд обозначений для величин, сохраняющих постоянное значение при заданных параметрах эллипса  $a, b, e, e'$  и координатах точки  $D$ :

$$R^2 = X^2 + Y^2; \quad f = \frac{a^2 R^2}{b^4}; \quad g = \frac{Z^2}{b^2}.$$

Для уравнения эллипса в плоскости меридiana долготы  $L$ , на котором лежит точка  $C$ , получают:

$$k_{i+1}^2 = \frac{f}{\left(1 + \frac{e'^2}{k_i}\right)^2} + g.$$

Это выражение можно преобразовать. Но оно и в таком виде удобно для итеративных вычислений множителя  $k$ . В начальном приближении следует принять  $e' = 0$ .

Геодезическая широта вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} \Phi \left( 1 + \frac{e^2}{k} \right).$$

Формула замечательна сама по себе. Она обобщает формулу связи геоцентрической и геодезической широт и становится верной, как для точек на эллипсоиде, так и для точек во внешнем пространстве:  $k = 1$  – для точек на эллипсоиде,  $k > 1$  – для точек над эллипсоидом. Любопытно заметить, что с ростом числа  $k$  разность широт  $B$  и  $\Phi$  уменьшается. Но лишь с удалением от Земли на 6,7 млн. земных радиусов она достигает пренебрегаемой величины

$$\Delta(B - \Phi) = 0,0001''.$$

Геоцентрическая широта определяется по формуле (рис. 6.3):

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{Z}{R}.$$

Формул для вычисления долгот и высот в упомянутой статье нет. Что касается долгот, то они вычисляются обычным путём. Судя по приведённой программе, высота определяется как длина отрезка  $CD$  (рис. 6.3). Поэтому можно записать

$$H = \sqrt{(R - x_C)^2 + (Z - z_C)^2},$$

$$H = \sqrt{R^2 \left( 1 - \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} k + e^2} \right)^2 + Z^2 \left( 1 - \frac{1}{k} \right)^2}.$$

Автором лекций выполнен подсчёт числа итераций в зависимости от широты положения точек и точности вычислений множителя  $k$  (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Число приближений при вычислениях широт и высот

Точность вычислений множителя $k$	Число приближений на разных широтах		
	$89^\circ$	$45^\circ$	$5^\circ$
$10^{-4}$	1	2	2
$10^{-5}$	1	3	3
$10^{-6}$	2	3	3
$10^{-7}$	2	3	4
$10^{-8}$	2	4	4

В случае первой строки табл. 6.3 (точность вычислений  $10^{-4}$ ) ошибки  $\Delta B$  в широте достигали  $0,0001''$ ,  $0,008''$  и  $0,005''$ , а ошибки  $\Delta H$  в высотах –  $0$ ,  $0,24$  и  $1,9$  метра соответственно в полярных, средних и экваториальных широтах. Во всех остальных случаях ошибки в широтах  $\Delta B = 0,0000''$ . Что касается ошибок  $\Delta H$  в высотах, то во второй и третьей строках они соответственно равнялись  $0$ ,  $1$  и  $12$  мм, в четвёртой строке  $0$ ,  $1$  и  $0$  мм, а в пятой строке равнялись нулю миллиметров. Поэтому точность вычислений множителя  $k$  должна быть не ниже  $10^{-8}$ .

В той же статье [13] опубликован неитеративный алгоритм, составленный на основе определения корней полинома третьей степени.

**6. Неитеративный способ вычисления геодезической широты по формуле А.А. Изотова.** Профессор А.А. Изотов применил последовательные приближения аналитически в ходе вывода формул с удержанием членов только с  $e^4$  [6; 7, с. 35]:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} B &= \left( 1 + \frac{ae^2}{\rho} + \frac{ae^4 \sin^2 \Phi}{2\rho} + \frac{a^2 e^4 \cos^2 \Phi}{\rho^2} \right) \operatorname{tg} \Phi, \\ B - \Phi &= \left( \frac{ae^2}{\rho} + \frac{ae^4 \sin^2 \Phi}{2\rho} + \frac{a^2 e^4 \cos 2\Phi}{\rho^2} \right) \frac{\sin 2\Phi}{2},\end{aligned}$$

где  $a$ ,  $e$  – параметры эллипсоида,  $\Phi$  – геоцентрическая широта,  $\rho$  - радиус-вектор (6.6). По мнению автора статьи [6], приведённые формулы тем точнее, чем точка выше над эллипсOIDом; максимальная погрешность “выражается в тысячных долях дуговой секунды, когда рассматриваемая точка находится на поверхности эллипсоида под широтой  $45^\circ$ ”.

Для вычисления высоты в [6] и [7 с. 34] приводятся разные формулы. Вторая работа появилась позже, поэтому ориентируемся на неё:

$$H = \sqrt{X^2 + Y^2} \sec B - N.$$

Автор статьи [17] сравнил десять разных алгоритмов, в том числе и описанный выше. Из приведённой в его публикации таблицы не следует, что данный способ является наиболее точным; при низких высотах и на экваторе возможны ошибки около 7 дм.

**7. Неитеративный алгоритм Л.В. Огородовой.** В публикации [12] для вычисления с высокой точностью геодезических координат точек земной поверхности, когда высоты не превышают 10 км, предложен следующий неитеративный алгоритм:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} B_o &= \frac{Z}{(1-e^2)R}, \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \\ H_o &= R \cos B_o + Z \sin B_o - a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_o}, \\ B &= B_o - \frac{\rho''}{2} \frac{e^2 H_o}{R} \sin 2B_o, \\ H &= H_o + \frac{e^4}{8} \frac{H_o^2}{R} \sin^2 2B_o.\end{aligned}$$

В формулах  $\rho''=206265''$ . Однако, в статье [10] указывается, что предложенные формулы не обеспечивают заявленной высокой точности.

**8. Неитеративный алгоритм Баландина Б.Н. и группы соавторов.** Алгоритм опубликован в статье [1]. По мнению авторов, он обеспечивает точность вычисления геодезической широты при  $H < 10\ 000$  м до  $0,0001''$ (в линейной мере это составляет 3 мм):

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} B_o &= \frac{Z}{(1-e^2)R}, \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \\ \operatorname{tg} B &= \left( 1 - \frac{He^2 \operatorname{tg} B_o}{Z \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 B_o}} \right) \operatorname{tg} B_o.\end{aligned}$$

При этом значение геодезической высоты может быть вычислено по формуле:

$$H = \rho - \frac{b}{\sqrt{1 - e^2(R/\rho)^2}}.$$

Погрешность вычисления геодезической широты оценивается по формуле:

$$dB'' = 206264,8 \left( \frac{He^2}{a+H} \right)^2 \left( \frac{R}{\rho} \right)^3 \left( \frac{Z}{\rho} \right).$$

Однако в статье [10] указывается, что предложенные формулы не обеспечивают высокой точности: ошибка в высоте даже в примере, рассмотренном в [1], составляет 0,056 м.

**9. Неитеративный алгоритм Медведева П.А.** Используется приведённая широта. Из анализа разных алгоритмов при высотах, не превышающих по абсолютной величине 10 км, по точности и по объёму вычислительных операций идеальным является алгоритм Боуинга [10]. Он подробно описан в работе [11, с. 193]. Медведев П.А. усовершенствовал алгоритм Боуинга. Он предложил всё выражать лишь через исходные параметры эллипсоида: большую полуось  $a$  и знаменатель  $f$  сжатия  $\alpha = (a-b)/a = 1/f$ . Изменил начальное приближение, позволяющее определять результаты с более высокой точностью. Видоизменил формулу вычисления приведённой широты и расширил диапазон допустимых высот. Им установлено, что в широкой области  $-1000 \text{ км} < H < \infty$  формулы алгоритма являются точными. Алгоритм принял следующий вид:

1. Определяются постоянные параметры

$$k_0 = \frac{f-1}{f}, \quad k_1 = a \frac{2f-1}{f(f-1)}, \quad k_2 = k_0 k_1.$$

При этом

$$k_1 = b e^2, \quad k_2 = a e^2.$$

2. Вычисляется расстояние  $R$  и долгота  $L$  по алгоритму (6.8).

3. Определяется приведённая широта  $U$  и геодезическая широта  $B$ :

$$U = \operatorname{arctg} \left[ \left( \frac{k_1}{\sqrt{Z^2 + (k_0 R)^2}} + 1 \right) \frac{k_0 Z}{R} \right];$$

$$B = \operatorname{arctg} \left( \frac{Z + k_1 \sin^3 U}{R - k_2 \cos^3 U} \right).$$

4. Если  $R=0$ , то  $L=0$ ,  $B=(\pi/2)\operatorname{sign}Z$ .

5. Высота  $H$  определяется по формуле, идентичной (6.10)

$$H = R \cos B + Z \sin B - a \sqrt{1 - k_2 \sin^2 B / a}.$$

“Предлагаемый алгоритм является неитерационным высокоточным и значительно проще рекомендованного [5] Госстандартом России” [10].

**Топоцентрические координаты.** Различают топоцентрические прямоугольные и полярные координаты. Начало прямоугольных координат  $u$ ,  $v$ ,  $w$  расположено над эллипсоидом в некоторой точке  $Q_1(B_1, L_1, H_1)$ . Ось  $w$  лежит на нормали к эллипсоиду, проходящей через точку  $Q_1$  (рис. 6.4). Ось  $u$  лежит в плоскости меридиана точки  $Q_1$ , перпендикулярна к оси  $w$  и направлена на север. Ось  $v$  перпендикулярна к осям  $w$  и  $u$  и направлена в сторону увеличения долготы на восток. Координатные оси  $u$  и  $v$  лежат в плоскости геодезического горизонта, т.е. в плоскости, перпендикулярной нормали к эллипсоиду.

К полярным координатам относятся:  $D$  — расстояние по прямой между двумя точками  $Q_1$  и  $Q_2$ ;  $Z_1$  — зенитное расстояние, определяемое вертикальным углом, отсчитываемым в точке  $Q_1$  от оси  $w$  до направления на точку  $Q_2$ ;  $A_1$  — геодезический азимут, равный двуграннымому

углу между плоскостью меридиана точки  $Q_1$  и плоскостью, проходящей через точку  $Q_2$  и нормаль в точке  $Q_1$ , отсчитывается в плоскости геодезического горизонта  $uQ_1v$  от оси  $u$  по часовой стрелке до направления на точку  $Q_2$ .

Прямоугольные и полярные координаты взаимосвязаны формулами:

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \sin Z_1 \cos A_1 \\ D \sin Z_1 \sin A_1 \\ D \cos Z_1 \end{pmatrix}.$$

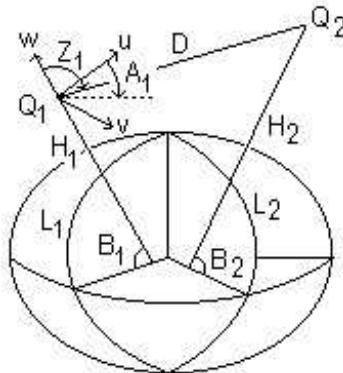


Рис. 6.4. Топоцентрические координаты

Вместо зенитного расстояния  $Z$  пользуются также углом  $v$ , определяющим высоту спутника над горизонтом. Зенитное расстояние и высота над горизонтом взаимосвязаны соотношением:

$$Z + v = 90^\circ.$$

В ГНСС измерениях в точке  $Q_1$  расположен центр антенны спутникового приёмника, а в точке  $Q_2$  — центр антенны передатчика космического аппарата. Азимут  $A$  и зенитное расстояние  $Z$  показывают, где в данный момент на небосводе находится спутник. Вычисление зенитных расстояний спутников и азимутов направлений на них необходимо для планирования измерений и для понимания, где расположен спутник в момент наблюдений. Для наблюдений интерес представляют лишь спутники, зенитные расстояния которых  $Z < 80^\circ$ .

Карты небосвода с расположением спутников даются на экранах многих спутниковых приёмников. На сайте [16] Информационно-аналитического центра Федерального космического агентства РФ по данным локального мониторинга в г. Королеве Московской области через каждые 30 секунд выдаётся картина расположения спутников (рис. 6.5). По азимуту и высоте над горизонтом легко найти, где в данный момент расположены спутники ГНСС.

Топоцентрические координаты на точку  $Q_2$  связаны с геоцентрическими координатами точек  $Q_1$  и  $Q_2$  соотношениями:

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix},$$

где

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\sin B_1 \cos L_1 & -\sin B_1 \sin L_1 & \cos B_1 \\ -\sin L_1 & \cos L_1 & 0 \\ \cos B_1 \cos L_1 & \cos B_1 \sin L_1 & \sin B_1 \end{pmatrix}.$$

Или

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} + \Phi^T \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

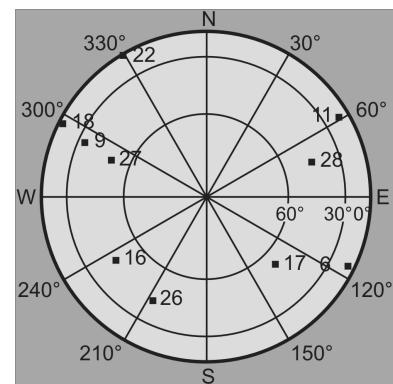


Рис. 6.5. Видимые по полярным координатам в г. Королеве спутники ГЛОНАСС в 11 час 30 мин 18.07.10 [16]

**Решение главных геодезических задач между точками в пространстве.** По аналогии с решением главных геодезических задач на плоскости и на эллипсоиде сформулируем решения этих задач в пространстве трех измерений (рис. 6.4).

*Прямая геодезическая задача.* Даны геодезические координаты  $B_1, L_1, H_1$  некоторой точки  $Q_1$  и полярные топоцентрические координаты  $A_1, Z_1, D$ , определяющие относительно нее положение второй точки  $Q_2$ . Требуется найти геодезические координаты  $B_2, L_2, H_2$  точки  $Q_2$ . Для этого вычисляются прямоугольные координаты точки  $Q_1$ . По полярным координатам определяются топоцентрические, а затем и геоцентрические координаты точки  $Q_2$ , которые затем пересчитываются в геодезические широты, долготы и высоты.

*Обратная геодезическая задача.* Даны геодезические координаты  $B_1, L_1, H_1$  и  $B_2, L_2, H_2$  точек  $Q_1$  и  $Q_2$ . Требуется найти величины  $A_1, Z_1, D$ , определяющие положение точки  $Q_2$  относительно точки  $Q_1$ . Задачу решают по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} A_1 &= \frac{v_2}{u_2}, \quad \operatorname{tg} Z_1 = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{w}, \quad D = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \\ D &= \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}.\end{aligned}$$

**Трансформирование пространственных прямоугольных координат.** Наличие различных общеземных и референцных координатных систем ведет к необходимости пересчитывать (трансформировать) координаты из одной системы в другую. Для этого надо знать, как взаимосвязаны их начала и координатные оси (рис. 6.6). Для перевода координат из одной системы в другую, необходимо выполнить следующие действия [2, с.28]:

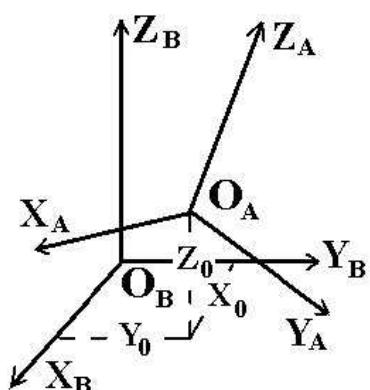


Рис. 6.6. Трансформирование координат из системы А в систему В.

- Повернуть систему  $X, Y, Z$  против часовой стрелки вокруг оси  $Z$  на угол  $\omega_z$ . Образуется новая система  $X_1, Y_1, Z_1$  (рис. 6.7). Поворот выполняется при помощи матрицы

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos \omega_z & \sin \omega_z & 0 \\ -\sin \omega_z & \cos \omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

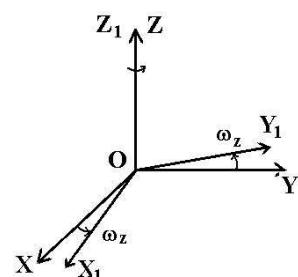
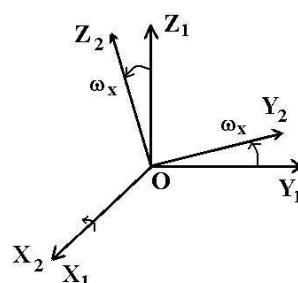


Рис. 6.7. Поворот координатных осей на угол  $\omega_z$

- Повернуть систему  $X_1, Y_1, Z_1$  против часовой стрелки вокруг оси  $X_1$  на угол  $\omega_x$ . Образуется новая система  $X_2, Y_2, Z_2$  (рис. 6.8). Поворот выполняется при помощи матрицы

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_x & \sin \omega_x \\ 0 & -\sin \omega_x & \cos \omega_x \end{pmatrix}.$$



- Повернуть систему  $X_2, Y_2, Z_2$  против часовой стрелки вокруг оси  $Y_2$  на угол  $\omega_y$ . Образуется новая система  $X_3, Y_3, Z_3$  (рис. 6.9). Поворот выполняется при помощи матрицы

$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos \omega_y & 0 & -\sin \omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega_y & 0 & \cos \omega_y \end{pmatrix}.$$

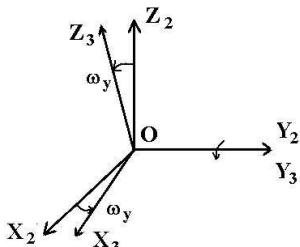


Рис. 6.9. Поворот координатных осей на угол  $\omega_y$

Рис. 6.8. Поворот координатных осей на угол  $\omega_x$

Земные системы устанавливаются так, что углы между соответственными осями не превышают 1-2". Матричные уравнения упрощаются: косинусы заменяются единицами, а синусы — углами в радианной мере. Совокупный переход от начальной системы в трансформированную систему выполняется матричным произведением  $\Omega E\Psi$ . С учётом упомянутых упрощений получают:

$$\Omega E\Psi = \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix}.$$

Пересчет координат из системы  $A$  в систему  $B$  выполняется по формулам (рис. 6.6):

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_A,$$

где  $X_0, Y_0, Z_0$  — координаты начала системы  $A$  в системе  $B$ ,  $m$  — разница в линейных масштабах систем;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — углы разворота координатных осей в радианах. Итак, в ходе пересчета координат должны быть учтены смещения начал координатных систем, все длины системы  $A$  увеличены в  $(1+m)$  раз, и выполнены три последовательных поворота координатных осей против часовой стрелки — на угол  $\omega_z$  вокруг оси  $Z$ , затем на угол  $\omega_x$  вокруг оси  $X$ , и после этого на угол  $\omega_y$  около оси  $Y$ . Следовательно, для пересчета координат надо знать *семь параметров трансформирования* —  $X_0, Y_0, Z_0, \omega_x, \omega_y, \omega_z, m$ .

Современные координатные системы *ITRS*, *WGS-84*, ПЗ-90.11 практически являются идентичными. Трансформирование координат не потребуется. В основном пересчёт будет необходим при работе со старыми координатными системами [8]. Так, для пересчета координат из СК-95 в ПЗ-90 по уравниванию АГС 1990 - 1996 гг. были получены значения параметров:  $X_0 = 22,7$  м,  $Y_0 = -128,8$  м,  $Z_0 = -83,8$  м,  $\omega_x = +0,11"$ ,  $\omega_y = +0,07"$ ,  $\omega_z = +0,02"$ ,  $m = -0,42 ppm$ . Многие параметры трансформирования устаревших систем имеются в [5].

Обратный пересчет — из системы  $B$  в систему  $A$ , учитывая малость параметров трансформирования, а также то, что транспонированная матрица поворота координатных осей совпадает с обратной матрицей, ведется по формулам:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_A = (1-m) \begin{pmatrix} 1 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 1 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_B - \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix}.$$

**Пересчет геодезических координат.** Выше предполагалось, что трансформирование выполняется на одном и том же эллипсоиде. Разработан ряд способов, когда в ходе трансформирования выполняется переход и на другой эллипсоид. Анализ точных и упрощенных алгоритмов дан в учебном пособии [8], с которым рекомендуется ознакомиться. В данном случае ограничимся рассмотрением лишь одного способа. Он описан во многих публикациях. Вывод формул дан в работе [4, с.20]. Они также имеются в работе [3, с.48]. Примеры вычислений можно найти в пособиях [8, 14].

Каждая пространственная прямоугольная координатная система связана со своим земным эллипсоидом, а прямоугольные координаты — с геодезическими координатами. Пусть система  $A$  отнесена к эллипсоиду с большой полуосью  $a_A$  и первым эксцентриситетом  $e_A$ , а система  $B$  — к эллипсоиду с большой полуосью  $a_B$  и первым эксцентриситетом  $e_B$ . Некоторая

точка в системе  $A$  имеет геодезические координаты  $B_A$ ,  $L_A$  и  $H_A$ , а после пересчета в систему  $B$  будет иметь координаты  $B_B$ ,  $L_B$  и  $H_B$ . Очевидно,

$$B_B = B_A + \Delta B, L_B = L_A + \Delta L, H_B = H_A + \Delta H.$$

Так как параметры трансформирования обычно малые величины, то разности геодезических координат  $\Delta B$ ,  $\Delta L$  и  $\Delta H$  также малы. Их можно вычислить по дифференциальным формулам. В приведенных ниже формулах угловые элементы трансформирования, а также широты и долготы даны в радианах. При переходе из системы  $A$  в систему  $B$  используют значения  $B$ ,  $L$ ,  $H$  в системе  $A$ , а при обратном переходе — в системе  $B$ , а поправки  $\Delta B$ ,  $\Delta L$ ,  $\Delta H$  вычитывают из соответствующих координат системы  $B$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta B = & \frac{1}{(M+H)} \left[ e^2 \frac{N}{a} \sin B \cos B \Delta a + \left( 1 + \frac{N^2}{a^2} \right) N \sin B \cos B \frac{\Delta e^2}{2} - \right. \\ & \left. - (X_o \cos L + Y_o \sin L) \sin B + Z_o \cos B \right] - \\ & - (\omega_x \sin L - \omega_y \cos L)(1 + e^2 \cos 2B) - m e^2 \sin B \cos B \\ \Delta L = & \frac{1}{(N+H)\cos B} (-X_o \sin L + Y_o \cos L) + \\ & + (1 - e^2) \operatorname{tg} B (\omega_x \cos L + \omega_y \sin L) - \omega_z \\ \Delta H = & - \frac{a}{N} \Delta a + N \sin^2 B \frac{\Delta e^2}{2} + \\ & + (X_o \cos L + Y_o \sin L) \cos B + Z_o \sin B - \\ & - e^2 N \sin B \cos B (\omega_x \sin L - \omega_y \cos L) + \left( \frac{a^2}{N} + H \right) m \end{aligned}$$

где

$$\Delta a = a_B - a_A, \quad \Delta e^2 = e_B^2 - e_A^2, \quad a = (a_A + a_B)/2, \quad e^2 = (e_A^2 + e_B^2)/2.$$

Формулы обеспечивают вычисление приращений геодезических координат с погрешностью в линейной мере до 0,3 м. Для уменьшения погрешности до 0,001 м необходимо выполнить еще одно приближение. С этой целью учитывают значения  $\Delta B$ ,  $\Delta L$ ,  $\Delta H$  и повторяют вычисления, принимая

$$B = \frac{B_A + B_B + \Delta B}{2}, \quad L = \frac{L_A + L_B + \Delta L}{2}, \quad H = \frac{H_A + H_B + \Delta H}{2}.$$

### Источники информации Лекции 6

1. Баландин Б.Н., Брынь М. Я., Меньшиков И. В., Фирсов Ю. Г. К вопросу вычисления геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам // Геодезия и картография. 2012, № 2, с. 9-11.
2. Бурша. М. Основы космической геодезии. Часть 1. Геометрическая космическая геодезия. –М.: Недра. 1971. 128 с.
3. Герасимов А.П. Спутниковые геодезические сети. – М.: ООО «Проспект». 2012. -176 с.
4. Герасимов А.П. Уравнивание государственной геодезической сети. -М.: Картгеоцентр-Геоиздат. 1996. -216 с.

5. ГОСТ Р 51794-2008. Глобальные навигационные спутниковые системы. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. - М.: Стандартинформ. 2009. -16 с.
6. Изотов А. А. Преобразование пространственных прямоугольных координат в геодезические координаты // Геодезия и картография. 1969, № 5, с. 6-7.
7. Изотов А. А., Зубинский В. И., Макаренко Н. Л., Мишиша А. М. Основы спутниковой геодезии. – М.: Недра, 1974. -320 с.
8. Комаровский Ю. А. Использование различных референц-эллипсоидов в судовождении: Учеб. пособие. Изд. второе, перераб. и дополн. – Владивосток: Мор. Гос. ун-т, 2005. – 341 с.
9. Красовский Ф.Н. Избранные сочинения т. 4. - М.: Издательство геодезической литературы. 1955. – 574 с.
10. Медведев П.А. Анализ преобразований пространственных координат точек земной поверхности // Геодезия и картография. 2014. №4, с. 2-8.
11. Морозов В. П. Курс сфериодической геодезии. Учебник для вузов. – М.: Недра, 1979. –260 с.
12. Огородова Л. В. Совместное вычисление геодезической широты и высоты точек поверхности Земли // Геодезия и картография. 2011, № 9, с. 11-15.
13. Полещенков В. Н. Преобразование геоцентрических декартовых координат в геодезические // Геодезия и картография. 2011, № 2, с. 15-19.
14. Серапинас Б. Б. Практикум по геодезическим основам карт. Учебное пособие. - М.: Географический факультет МГУ. 2008. -146 с.
15. Серапинас Б. Б. Геодезические основы карт. Учебное пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. -132 с.
16. Федеральное космическое агентство, Информационно-аналитический центр. <http://www.glonass-ianc.rsa.ru/pls/htmlDb/f?p=201:20:4431530573070005::NO> (Дата обращения 7.07.2014).
17. Borkowski K. M. Accurate Algorithms to Transform Geocentric to Geodetic Coordinates. Torun, Poland. Bull. Géod., 63 (1989), pp. 50–56. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.astro.uni.torun.pl/~kb/Papers/geod/Geod-BG.htm> (дата обращения 20.06.2014).

### Контрольные вопросы

1. Какие учитываются случаи при вычислении геодезических долгот  $L$  по пространственным прямоугольным координатам  $X$  и  $Y$ ?
2. Чем отличаются алгоритмы для вычислений геоцентрических широт от алгоритмов для вычислений геодезических широт?
3. Что общего и чем различаются итеративные алгоритмы вычислений геодезической широты и высоты по отрезку ( $N+H$ ) нормали к эллипсоиду и по отстоянию  $R$  от оси вращения эллипсоида?
4. Какие достоинства и недостатки итеративного алгоритма вычисления геодезической широты и высоты на основе геометрических представлений?
5. Перечислите основные особенности итеративного алгоритма Borkowski K.M. вычисления геодезической широты и высоты?
6. Чем принципиально отличается итеративный алгоритм вычисления геодезической широты и высоты Полещенкова В.Н. от других итеративных алгоритмов?
7. Решение главных геодезических задач между точками в пространстве. Какие топоцентрические координаты используются при ГНСС-наблюдениях?
8. Какие необходимо выполнить действия для перевода координат из одной системы отсчёта в другую?